Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (n = Grad von p(x) und m = Grad von q(x))

1. Definitionsbereich D

- Nullstellen von q(x) bestimmen

2. Symmetrie

- Achsensymmetrie (zur y-Achse; Ordinatenachse), wenn f(x) = f(-x)
- Punktsymmetrie (zum Koordinatenursprung), wenn f(-x) = -f(x)

3. Polstellen (senkrechte Asymptoten/hebbare Definitionslücken)

- $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$ => $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote
- $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) = 0$
  - f(x) kürzbar ohne Veränderung von D => $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote
  - f(x) Kürzbar mit Veränderung von D => x_0 ist hebbare Definitionslücke („Loch“)
- Verhalten von f(x) bei beidseitiger Annäherung an Polstellen untersuchen (Vorzeichenwechsel ...)

4. Verhalten im Unendlichen (f(x) für x → $\mp \infty$)

- n < m: x-Achse (Abszissenachse) als waagerechte Asymptote (y = 0)
- n = m: waagerechte Asymptote y = w (w ist Quotient aus den Koeffizienten a und b, die vor der Potenz mit dem höchsten Exponenten im Zähler (a) und Nenner (b) stehen)
- n = m + 1: schiefe Asymptote (Polynomdivision)
- n > m + 1: Näherungsfunktion (Polynomdivision)

5. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

- Nullstellen N $(x_0 \mid 0)$; p(x) = 0; (Vorsicht: D beachten)
- Schnittpunkte mit der Ordinatenachse S_y $(0 \mid y_0)$, $f(0) = y_0$

6. Extrempunkte (Ableitungen notwendig)

- f'(x) = 0 ist notwendige Bedingung
- f''(x) ≠ 0 ist hinreichende Bedingung
  - $f''(x_0) < 0$ => Maximum/Hochpunkt H $(x_0 \mid f(x_0))$
  - $f''(x_0) > 0$ => Minimum/Tiefpunkt T $(x_0 \mid f(x_0))$
  - Entscheidung auch durch Untersuchung von Vorzeichenwechsel in beidseitiger Umgebung von $f'(x_0)$ möglich
    - \+ nach - => Maximum/Hochpunkt (von links nach rechts)
    - \- nach + => Minimum/Tiefpunkt (von links nach rechts)

7. Wendepunkte

- f''(x) = 0 ist notwendige Bedingung
- f'''(x) ≠ 0 ist hinreichende Bedingung (Entscheidung auch durch Untersuchung von Vorzeichenwechsel in beidseitiger Umgebung von $f''(x_0)$ möglich)
- W $(x_0 \mid f(x_0))$

8. Graph der Funktion

- dazu eventuell noch weitere Werte durch eine Wertetabelle ermitteln