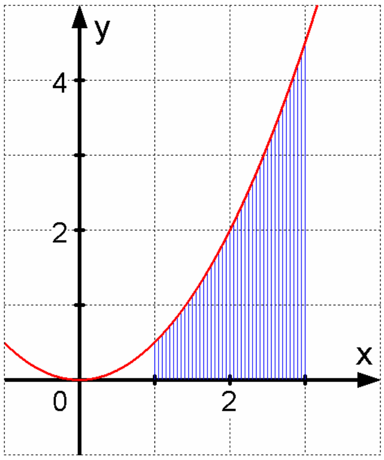
Flächenberechnungen 2b



Teil 2b:

Flächenberechnungen mit Integral
(Fortsetzung)

Datei Nr. 48 114

Juni 2001

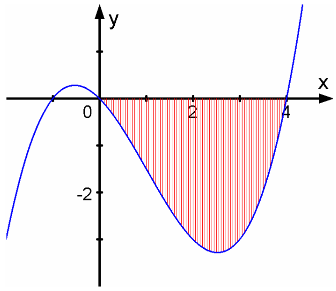
Friedrich Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

2. Flächenberechnung mit Integral

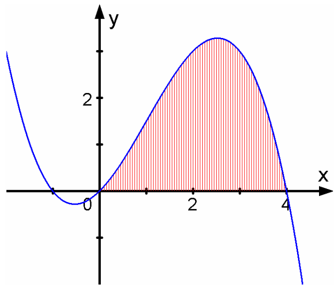
2.6 Kru-Li-Traps unter der x-Achse



Beispiel (1): $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2-x$

Das Schaubild K von f begrenzt mit der x-Achse zwei Flächen. Die rechte davon liegt unter der x-Achse.
Der Versuch diese Fläche auf dieselbe Weise wie bisher zu berechnen führt zu einem negativen Wert.

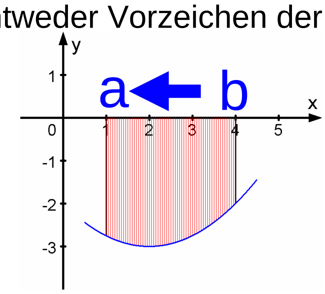
$$\int_0^4\left(\tfrac{1}{4}x^3-\tfrac{3}{4}x^2-x\right)dx=\left[\tfrac{1}{16}x^4-\tfrac{1}{4}x^3-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4=\tfrac{1}{16}\cdot4^4-\tfrac{1}{4}\cdot4^3-\tfrac{1}{2}\cdot16=16-16-8=-8$$



Wir führen einen Versuch durch und spiegeln das Schaubild an der x-Achse.
Dann wird daraus diese Kurve: $y=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+x$.
Wir rechnen neu:

$$\int_0^4\left(-\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{3}{4}x^2+x\right)dx=\left[-\tfrac{1}{16}x^4+\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^4=-16+16+8=8$$

Jetzt wird dieser Fläche ein positiver Inhalt zugeordnet.
Wir erkennen also die Methode:

> Liegt ein Kru-Li-Trap unter der x-Achse, muß man entweder Vorzeichen der Funktion umkehren oder die Grenzen vertauschen:
>
> $$A=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx$$
>
> 
>

Beispiel (2): Die im Kasten dargestellte Fläche gehört zur Randfunktion $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x-2$:

$$A=\int_4^1\left(\tfrac{1}{4}x^2-x-2\right)dx=\left[\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{2}x^2-2x\right]_4^1=\left[\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{2}-2\right]-\left[\tfrac{64}{12}-8-8\right]=$$

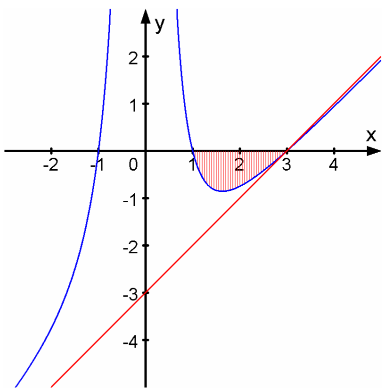
$$A=-\tfrac{63}{12}-\tfrac{1}{2}+14=14-\tfrac{21}{4}-\tfrac{2}{4}=\tfrac{56-21-2}{4}=\tfrac{33}{4}$$

Beispiel (3): $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2}$

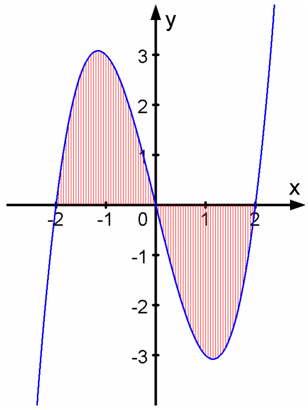
Die schraffierte Fläche hat diesen Inhalt:

$$A=\int_3^1\left(x-3-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x-\ln x-\frac{3}{x}\right]_3^1$$

$$A=\left[\frac{1}{2}-3-3\right]-\left[\frac{9}{2}-9-\ln 3-1\right]=\frac{1}{2}+\ln 3\approx 1{,}60$$



2.7 Es geht drunter und drüber ...



Damit meine ich Flächen, die einen Teil über der x-Achse haben und einen Teil darunter.

(4) $f(x) = x^3 - 4x$

Gesucht ist die Gesamtfläche, die das Schaubild K und die x-Achse begrenzen.

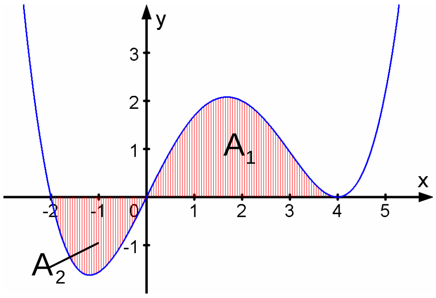
1. (sinnloser) Versuch:

$$A = \int_{-2}^{2}\left(x^3 - 4x\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{2} = [4-8]-[4-8] = 0$$

Dies geht schief, weil wegen der Punktsymmetrie der Kurve (nur ungerade Exponenten!) beide Teilflächen gleich groß sind, und weil die rechte Teilfläche mit dieser Integration einen negativen Inhalt bekommt. Zusammen wird dies dann 0.

2. (guter) Versuch:

$$A = 2\int_{-2}^{0}\left(x^3 - 4x\right)dx = 2\left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 2[0]-2[4-8] = 8$$



(5) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 6x^3 + 32x)$

hat die Nullstellen -2, 0 und 4.

Gesucht ist die Gesamtfläche, die das Schaubild K und die x-Achse begrenzen.

Wir müssen jetzt die beiden Teil-Flächen getrennt berechnen. Zuerst die **rechte Fläche**:

$$A_1 = \tfrac{1}{16}\int_{0}^{4}\left(x^4 - 6x^3 + 32x\right)dx = \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 + 16x^2\right]_0^4 = \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{1}{5}\cdot 4^5 - \tfrac{3}{2}4^4 + 16\cdot 4^2\right)$$

Achtung: Ausklammern von 4^4 vereinfacht die Rechnung bedeutend:

$$A_1 = \tfrac{1}{16}\cdot 4^4\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{2} + 1\right) = 16\cdot\tfrac{8-15+10}{10} = 16\cdot\tfrac{3}{10} = \tfrac{24}{5}$$

Nun die **zweite Fläche**. Da diese unterhalb der x-Achse liegt, vertauschen wir die Grenzen, damit sie einen positiven Inhalt erhält:

$$A_2 = \tfrac{1}{16}\int_{0}^{-2}\left(x^4 - 6x^3 + 32x\right)dx = \tfrac{1}{16}\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 + 16x^2\right]_0^{-2} = \tfrac{1}{16}\left(-\tfrac{1}{5}\cdot 2^5 - \tfrac{3}{2}2^4 + 16\cdot 2^2\right)$$

Jetzt klammern wir $2^3=8$ aus:

$$A_2 = \tfrac{1}{16}\cdot 8\left(-\tfrac{4}{5} - 3 + 8\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{4}{5} + 5\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{21}{5} = \tfrac{21}{10}$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 = \frac{24}{5} + \frac{21}{10} = \frac{48+21}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}9$

> ***Merke:***
>
> Besteht eine Fläche aus Kru-Li-Traps, die **oberhalb und unterhalb** der x-Achse liegen, so sind diese getrennt zu berechnen.
> Im günstigen Falle von Punktsymmetrie genügt die Verdoppelung der einen Teilfläche.

2.8 Flächen zwischen zwei Kurven

Beispiel (6): Wie groß ist die Fläche, die von den Schaubildern der Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ begrenzt wird ?

Hinführung: Zunächst betrachten wir die linke Abbildung. Diese zeigt die gesuchte Fläche zwischen den beiden Parabeln.

1. Schritt: Wir verschieben beide Kurven und damit auch die zu berechnende Fläche um eine Strecke +C so nach oben, daß die Zielfläche ganz oberhalb der x-Achse liegt.
Die Funktionsgleichungen ändern sich damit in:
$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 + C$ und $g_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + C$

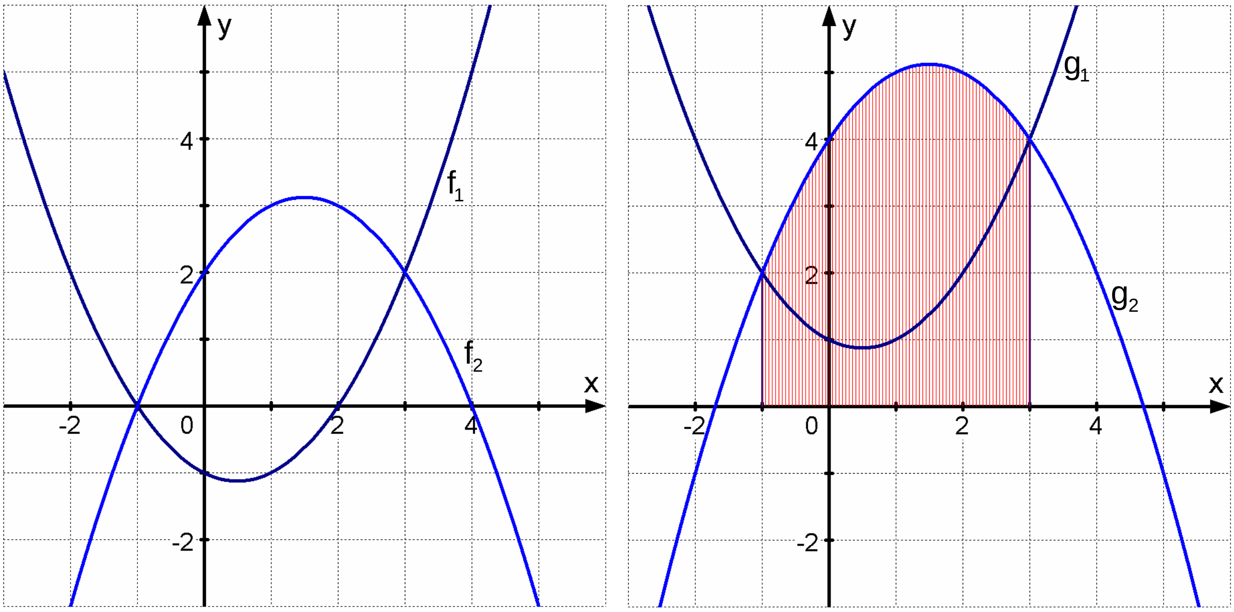
2. Schritt: Wir denken uns nun die gesuchte Fläche als Differenz zweier krummliniger Trapeze (rechtes Bild):
Das große „Kru-Li-Trap" wird oben durch das Schaubild von g_2 begrenzt. Sein Inhalt ist $A_1 = \int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx$
Das kleine „Kru-Li-Trap" wird durch das Schaubild von g_2 Begrenzt. Sein Inhalt ist: $A_2 = \int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx$

3. Schritt: Die gesuchte Fläche hat daher diesen Inhalt:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3} g_1(x)\,dx - \int_{-1}^{3} g_2(x)\,dx = \int_{-1}^{3} \left[\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1 + C\right) - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2 + C\right)\right] dx$$

Beim genauen Hinsehen erkennt man, daß der zur Verschiebung über die x-Achse eingefügte Summand +C durch die Subtraktion der beiden Funktionen wieder wegfällt. Daher kann man ihn eigentlich weglassen und gleich mit den Funktionen f_1 und f_2 arbeiten. Damit erhält man folgende Berechnung:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3} f_1(x)\,dx - \int_{-1}^{3} f_2(x)\,dx = \int_{-1}^{3} \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx$$



Berechnung der Fläche:

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{3}\left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx = \int_{-1}^{3}\left[\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1\right) - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 2\right)\right]dx$$

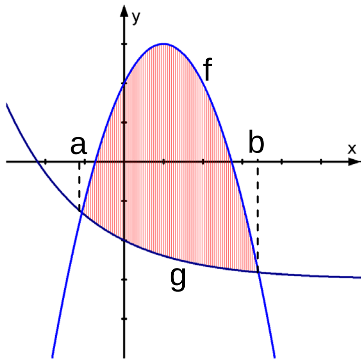
$$A = \int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x - 3\right)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = \left[9 - 9 + 9\right] - \left[-\tfrac{1}{3} - 1 + 3\right] = 7 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{22}{3}$$

Verallgemeinerung dieser Methode

Fläche zwischen zwei Kurven

Wird eine Fläche von einer oberen und einer unteren Kurve begrenzt, die zu den Funktionen F und g gehören, dann kann man die von ihnen begrenzte Fläche so berechnen:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

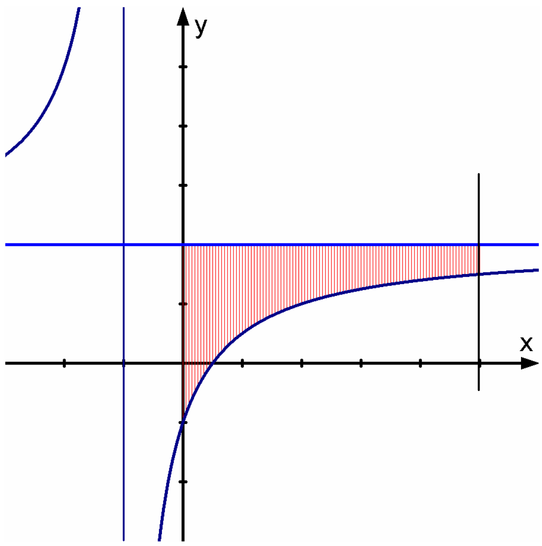


Diese Regel formulieren Schüler auch gerne so: „Integral aus oberer Kurve minus unterer Kurve“ ....(wobei man natürlich Kurven nicht subtrahieren kann !)

Der Beweis für diese Regel geht analog zu der in Beispiel (6) gezeigten Methode: Man verschiebt die Kurven um eine solche Strecke nach oben (+ C), daß die besagte Fläche oberhalb der x-Achse liegt. Dann kann man die Fläche als Differenz zweier Kru-Li-Traps berechnen. Schreibt man dazu die beiden Funktionen unter ein gemeinsames Integral, fällt die „Verschiebungskonstante“ + C wieder weg.

Weiteres Beispiel: (7)

Das Schaubild K der gebrochen rationalen Funktion f mit $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ hat die waagerechte Asymptote a: y = 2. Berechne die Fläche zwischen K, a und den Geraden x = 0 und x = 5.



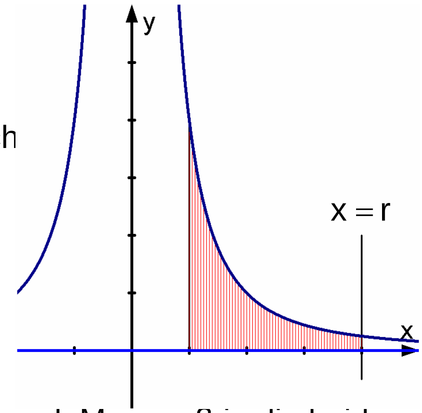
Lösung:

$$A = \int_0^5\left(2 - \frac{2x-1}{x+1}\right)dx = \int_0^5 \frac{2(x+1) - (2x-1)}{x+1}dx$$

$A = \int_0^5 \frac{3}{x+1}dx$ Substitution: $u = x + 1;\ du = dx$

$$A = \int_1^6 \frac{3}{u}du = 3\left[\ln u\right]_1^6 = 3\ln 6 - 3\ln 1 = 3\ln 6 = \ln 6^3 = \ln 216$$

2.9 Flächen, die ins Unendliche reichen



(8) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

Das Schaubild dieser Funktion nähert sich asymptotisch der x-Achse an. Daher schließen das Schaubild K, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine bis ins unendliche reichende Fläche ein.
Die Schreibweise

$$A = \int_1^\infty \frac{4}{x^2}\,dx \qquad (*)$$

ist leider nicht zulässig, und das hat einen einfachen Grund: Man muß ja die beiden Grenzen in die Stammfunktion einsetzen und sollte dann mit „Unendlich" rechnen. Dies geht nicht, obwohl man mit diesem Begriff natürlich rechenähnliche Überlegungen anstellen kann. Aber ∞ ist nun mal keine Zahl !.
Dennoch findet man Schreibweisen wie in (*) dargestellt sehr oft. Vor allem Physiker neigen dazu, in ihren Integralanwendungen derartige Schreibweisen zu verwenden. Dann aber bezeichnen sie damit das Ergebnis nach Abschluß der Berechnungen. Aber zum Durchführen der Rechnung ist das Zeichen ∞ als Integrationsgrenze verboten.

Zum **Berechnen einer bis ins Unendliche reichenden Fläche**

verwendet man eine Flächeninhaltsfunktion und setzt auf der Seite der Fläche eine variable Grenze r an, auf der die Fläche ins Unendliche reichen soll.

Dann berechnet man die Flächeninhaltsfunktion, etwa

$$A(r) = \int_a^r f(x)\,dx$$

und berechnet im Anschluß den Grenzwert $A^* = \lim_{r\to\infty} A(r) = \ldots$

Wenn dieser Grenzwert existiert, dann kann man der ins Unendliche reichenden Fläche einen endlichen Inhalt zuordnen.

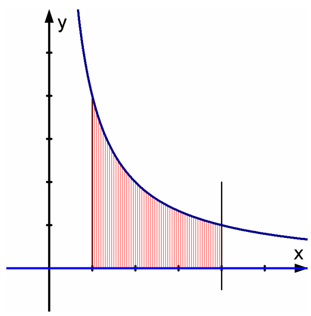
In unserem Beispiel sieht das so aus:

$$A(r) = \int_1^r \frac{4}{x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^r = -\frac{4}{r} + 4 = 4 - \frac{4}{r}$$

Und nun verschiebt man den rechten Rand ins Unendliche:

$$A^* = \lim_{r\to\infty} A(r) = 4\,, \quad \text{denn} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0\,.$$

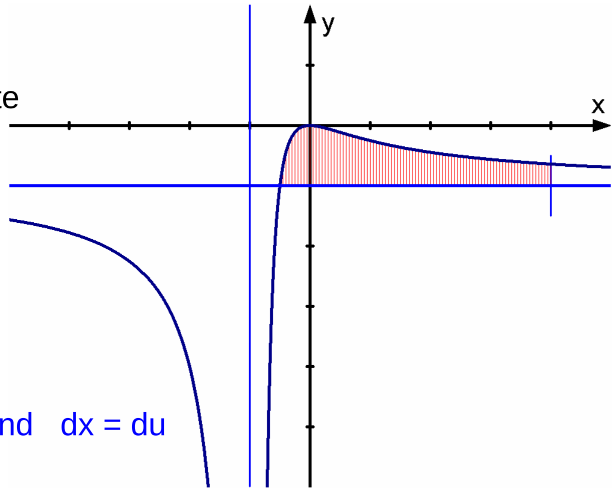
(9) $f(x) = \frac{4}{x}$ Gleiche Aufgabenstellung wie in (8):



$$A(r) = \int_1^r \frac{4}{x}\,dx = \left[4 \cdot \ln x\right]_1^r = 4\cdot\ln r - 4\cdot\ln 1 = 4\cdot\ln r$$

Der Grenzwert für $r \to \infty$ existiert jedoch nicht, weil für $r \to \infty \Rightarrow \ln r \to \infty$. Hier kann man dieser Fläche keinen endlichen Inhalt zuordnen.

(10) $f(x) = -2\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$



Das Schaubild K von f hat die waagerechte Asymptote y = - 2. Es schneidet diese bei x = 1. Nach rechts schließen also Kurve und waagerechte Asymptote eine Fläche ein.
Besitzt diese einen endlichen Inhalt.?

Ansatz: $A(r) = -2\int_{-1}^{r} \frac{x^2}{(x+2)^2}dx$

Substitution: u = x + 2 also x = u – 2 und dx = du

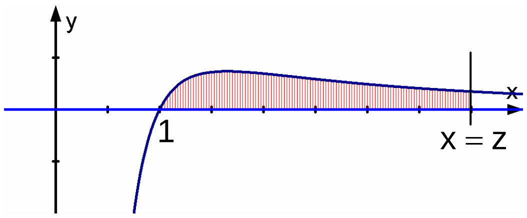
$$A(r) = -2\int_{-1}^{r} \frac{x^2}{(x+2)^2}dx = -2\int_{1}^{r-2} \frac{(u-2)^2}{u^2}dx$$

$$A(r) = -2\int_{1}^{r-2} \frac{u^2-4u+4}{u^2}dx = -2\int_{1}^{r-2}\left(1-\frac{4}{u}+\frac{4}{u^2}\right)du = -2\left[u-4\cdot\ln u-\frac{4}{u}\right]_1^{r-2}$$

$$A(r) = -2\left[r-2-4\cdot\ln(r-2)-\frac{4}{r-2}\right]-\left[1-4\cdot\ln 1-4\right]$$

Jetzt können wir diese Rechnung schon beenden, denn die Flächeninhaltsfunktion enthält den Summanden ln (r - 2) und der hat für $r \to \infty$ keinen endlichen Wert.
Ergebnis: Diese Fläche hat keinen endliche Inhalt.

(11) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x^2}$,



Zeige, daß das Schaubild K zusammen mit der x-Achse im 1. Feld eine bis ins Unendliche reichende Fläche mit endlichem Inhalt begrenzt.

Lösung: Wir stellen die Flächeninhaltsfunktion auf:

$$A(z) = \int_1^z \frac{\ln x^2}{x^2}dx = \int_1^z \frac{2}{x^2}\cdot\ln x\, dx$$

Partielle Integration: $u' = 2x^{-2} \Rightarrow u = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{2}{x}$

$v = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

$$A(z) = [u\cdot v]_1^z - \int_1^z u\cdot v'dx = \left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z - \int_1^z -\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = \left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]+2\int_1^z x^{-2}\,dx$$

$$A(z) = \left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x\right]_1^z + 2\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^z = \left[-\frac{2}{x}\cdot\ln x-\frac{2}{x}\right]_1^z = \left[-\frac{2}{x}\cdot(\ln x+1)\right]_1^z$$

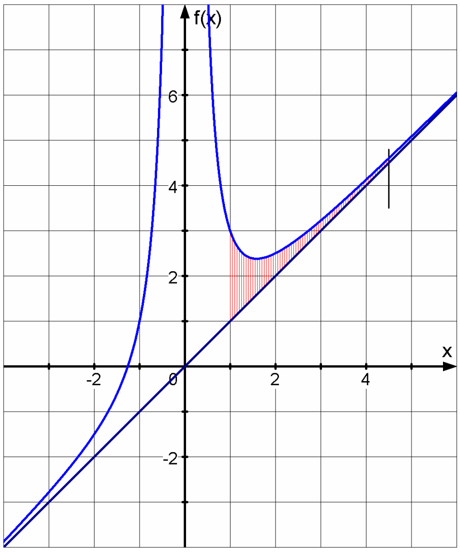
$$A(z) = \left[-\frac{2}{z}(\ln z+1)\right]-\left[-2\cdot\left(\underbrace{\ln 1}_{0}+1\right)\right] = -\frac{2}{z}\cdot(\ln z+1)+2$$

$$\lim_{x\to\infty} A(z) = 2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln z}{z} = 2-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{1} = 2-2\cdot 0 = 2$$

wobei die Regel von de L'Hospital zur Anwendung gekommen ist.

2.10 Flächen zwischen Kurven und ihren Asymptoten.

Gebrochen rationale Funktionen (und andere Funktionen) haben die angenehme Eigenschaft, daß Flächen, die von der Kurve und der Asymptote begrenzt werden, besonders einfach zu berechnen sind, wie wir an drei Beispielen sehen werden:



(12): $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2}=x+\frac{2}{x^2}$

hat die schiefe Asymptote $y = x$.
Eine Fläche wird begrenzt durch K, die schiefe Asymptote und den Geraden $x = 1$ und $x = r$ ($r>1$).
Diese hat folgenden Inhalt:

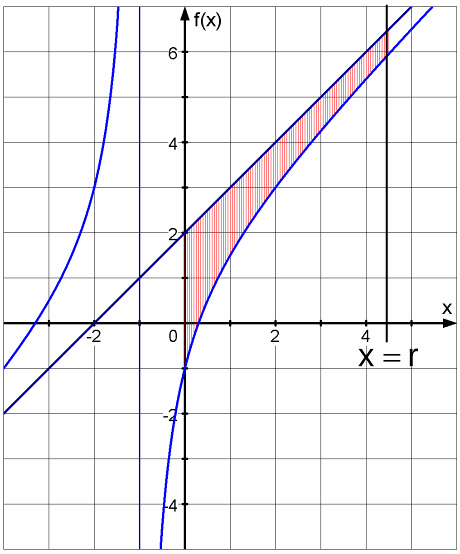
$$A(r)=\int_1^r (f(x)-x)dx=\int_1^r\left(\left(x+\frac{2}{x^2}\right)-x\right)dx=\int_1^r\frac{2}{x^2}dx$$

Die untere Kurve ist die Asymptote: $y = x$.
Dieser Funktionsterm ist Teil der Funktion f.
Daher fällt bei der Formel für die Fläche zwischen zwei Kurven der Asymptotenterm heraus.

$$A(r)=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^r=-\frac{2}{r}+2=2-\frac{2}{r}.$$

Für die ins Unendliche reichende Fläche gilt daher:

$$A^*=\lim_{r\to\infty}A(r)=2,\quad \text{denn}\quad \lim_{r\to\infty}\frac{2}{r}=0.$$



(13) $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+1}$

Um die schiefe Asymptote zu bestimmen benötigt man Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2+3x-1):(x+1)=x+2 \\ -(x^2+\ x) \\ \hline \quad (2x-1) \\ \quad -(2x+2) \\ \hline \quad\quad -3 \end{array}$$

Daraus folgt, daß man die Funktion so zerlegen kann:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{x+1}=x+2-\frac{3}{x+1}$$

Wegen $\lim_{|x|\to\infty}\frac{3}{x+1}=0$ ist $y = x + 2$ die schiefe Asymptote.

Nun kann man die schraffierte Fläche berechnen

$$A(r)=\int_0^r\left(x+2-\left(x+2-\frac{3}{x+1}\right)\right)dx=\int_0^r\frac{3}{x+1}dx$$

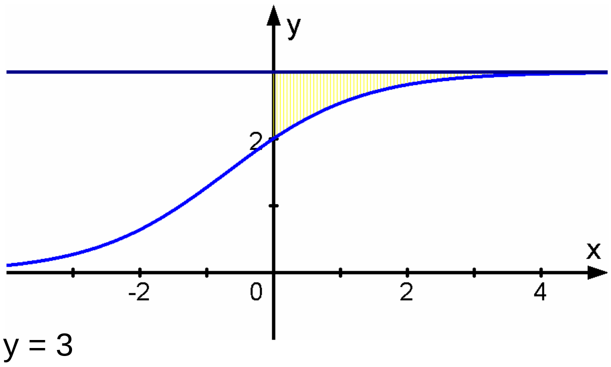
Wer nicht mit der Polynomdivision arbeitet, geht so vor:

$$A(r)=\int_0^r\left(x+2-\frac{x^2+3x-1}{x+1}\right)dx=\int_0^r\frac{(x+2)(x+1)-(x^2+3x-1)}{x+1}dx=\int_0^r\frac{3}{x+1}dx$$

Dann folgt Substitution: $u = x + 1$ also $du = dx$.

$$A(r) = \int_1^{r+1} \frac{3}{u}\,du = \left[3\ln u\right]_1^{r+1} = 3\cdot\ln(r+1) - 3\cdot\ln 1 = 3\cdot\ln(r+1)$$

Ist r eine feste endliche Zahl, haben wir einen Flächeninhalt.
Lassen wir aber r gegen Unendlich gehen, dann geht auf die Logarithmusfunktion nach Unendlich, so daß die ins Unendliche reichende Fläche keinen endlichen Inhalt hat.



(14) $f(x) = \dfrac{6}{e^{-x} + 2}$

Zuerst sei bemerkt, daß es nicht Gelingen wird, eine Stammfunktion zu f zu finden. Hier hilft keine Substitution. Berechnet man jedoch die Fläche zwischen der waagerechten Asymptote $y = 3$ und der Kurve, dann wird das Intergral lösbar:

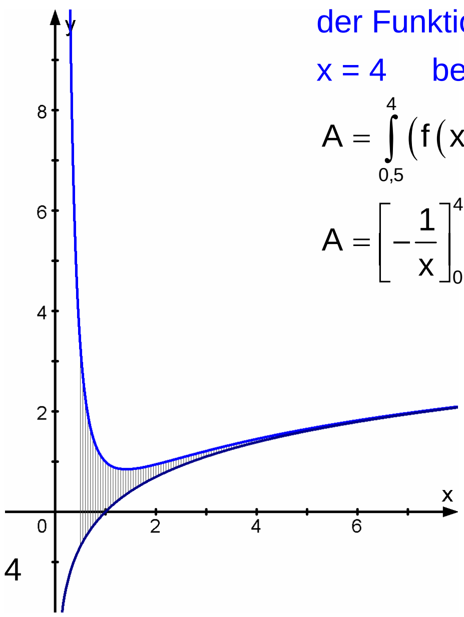
$$A = \int_0^5 \left(3 - \frac{6}{e^{-x}+2}\right)dx = \int_0^5 \frac{3e^{-x}+6-6}{e^{-x}+2}\,dx = \int_0^5 \frac{3e^{-x}}{e^{-x}+2}\,dx$$

Substitution: $u = e^{-x} + 2 \Rightarrow du = e^{-x}dx \Rightarrow 3e^{-x}dx = 3du$

$$A = \int_3^{2+e^{-5}} \frac{3du}{u} = 3\left[\ln u\right]_3^{2+e^{-5}} = 3\cdot\ln(2+e^{-5}) - 3\cdot\ln 3 \approx \ldots$$

Soll man eine Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im 2. Feld berechnen, dann stößt man zuerst an das Problem der nicht auffindbaren Stammfunktion. Wenn man jedoch herausgefunden hat, daß das Schaubild punktsymmetrisch zum Wendepunkt W (- ln 2 I 3) , der berechnet eben die am W gespiegelte Fläche, die dann wie eben berechnet wird, da sie nun zwischen der Geraden y = 3 und K liegt.

(15) $f(x) = \dfrac{x^2\cdot\ln x + 1}{x^2} = \ln x + \dfrac{1}{x^2}$ Das Schaubild K von f und das Schaubild H der Funktion g mit $g(x) = \ln x$ und die Geraden $x = \frac{1}{2}$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche vom Inhalt A(r).

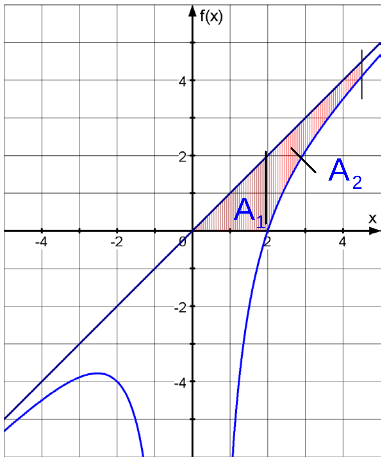


$$A = \int_{0,5}^{4} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_{0,5}^{4} \left(\ln x + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)dx = \int_{0,5}^{4} x^{-2}\,dx =$$

$$A = \left[-\frac{1}{x}\right]_{0,5}^{4} = -\frac{1}{4} + 2 = \tfrac{7}{4}$$

Die Kurve H ist hier Näherungskurve für K. Und genau wie bei Kurve und Asymptote Vereinfacht sich auch hier das Integral für für Fläche zwischen den beiden Kurven.

2.11 Zusammengesetzte Flächen



(16) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

Das Schaubild K, die schiefe Asymptote,
die x-Achse und die Gerade x = r (r > 2)
begrenzen eine Fläche. Berechne deren Inhalt A(r)
sowie deren Grenzwert für r gegen Unendlich.

Lösung:

Jetzt ist es wichtig, zu erkennen, daß die Fläche zwei verschiedene untere Begrenzungen hat, weshalb Man sie auch nicht auf einmal berechnen kann.
Die Teilfläche A_1 ist in diesem Fall ein Dreieck und kann entweder mit der Dreiecksformel $A_1 = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 2$ oder mittels Integral berechnet werden:

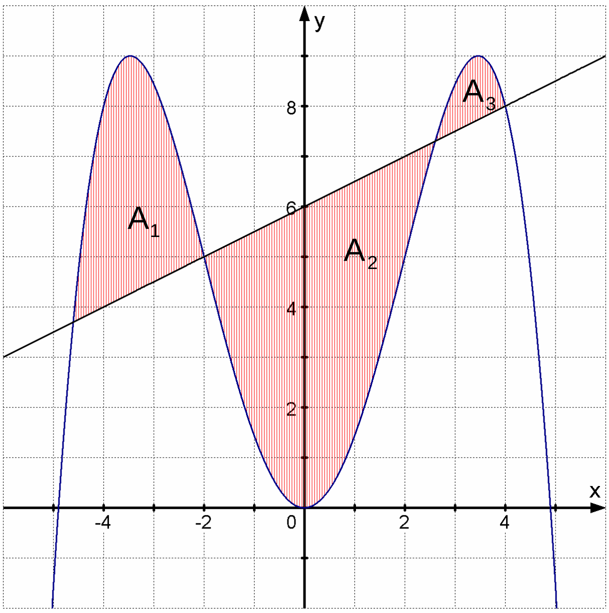
$$A_1 = \int_0^2 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2.$$

Die Teilfläche A_2 wird zunächst als Flächeninhaltsfunktion berechnet:

$$A_2(r) = \int_2^r \left(x - \left(x - \frac{8}{x^2} \right) \right) dx = \int_2^r \frac{8}{x^2}\,dx = \left[-\frac{8}{x} \right]_2^r = -\frac{8}{r} + 4 = 4 - \frac{8}{r}$$

Gesamtfläche: $A(r) = A_1 + A_2(r) = 2 + 4 - \frac{8}{r} = 6 - \frac{8}{r}$.

Grenzwert für $r \to \infty$: $A^* = \lim\limits_{r\to\infty} A(r) = 6$, denn $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{8}{r} = 0$



(17) Die Kurve mit der Gleichung
$y = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2$
und die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 6$
schneiden sich in 4 Punkten.
Se begrenzen eine aus 3 Teilen zusammengesetzte Fläche.

Zunächst muß man die Schnittpunkte berechnen. Aus der Zeichnung liest Man $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ ab.
Diese sind zu bestätigen und die restlichen müssen berechnet werden.
Schnittgleichung:
$\frac{1}{2}x + 6 = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \quad |\cdot 16$

$8x + 96 = -x^4 + 24x^2$ bzw. $x^4 - 24x^2 + 8x + 96 = 0$

Da zwei bekannte Lösungen vorliegen, kann man die zugehörigen Linearfaktoren ausklammern: (x + 2) und (x – 4).
Dies geht am schnellsten mit dem Horner-Schema, oder auch mittels Polynomdivision, indem man durch $(x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$ dividiert:

Hornerschema aus den Koeffizienten der Schnittgleichung:

	1	0	-24	8	96
	0	-2	4	40	-96
x = - 2					
	1	-2	-20	48	$\boxed{0}$
	0	4	8	-48	
x = 4					
	1	2	-12	$\boxed{0}$	

Das Hornerschema liefert uns die Zerlegung: von

$x^4 - 24x^2 + 8x + 96 = 0$ in

$(x+2)(x-4)\left(1x^2 + 2x - 12\right) = 0$

Dasselbe erreicht man mit der Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 0x^3 - 24x^2 + 8x + 96\right) : \left(x^2 - 2x - 8\right) = x^2 + 2x - 12 \\
-(x^4 - 2x^3 - \ 8x^2) \\
\hline
\quad 2x^3 - 16x^2 + 8x \\
\quad -(2x^3 - 4x^2 - 16x) \\
\hline
\qquad -12x^2 + 24x + 96 \\
\qquad -(-12x^2 + 24x + 96) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die Schnittgleichung wurde durch die abgelesenen Lösungen zerlegt in

$$(x+2)(x-4)\underbrace{\left(x^2 + 2x - 12\right) = 0}_{x_{3,4}}$$

Man erhält die Schnittstellen 3 und 4:

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \approx \begin{cases} 2,6 \\ -4,6 \end{cases}$$

Flächenberechnung:

Die Teilflächen 1 und 3 haben K als obere Begrenzung, lassen sich also nach diesem Schema bestimmen: $A_{1,2} = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$ wobei mit g die zur Geraden gehörende Funktion bezeichnet worden ist. Die Teilfläche 2 hat nun K als untere und g als obere Begrenzung. Wenn man daher dasselbe Integral verwendet, wird das Ergebnis wegen der vertauschen Vorzeichen negativ, was man dadurch kompensieren kann, daß man für diesen Fall die Grenzen vertauscht.

Nun empfiehlt sich folgendes Vorgehen (mit Näherungswerten für die Grenzen)

$$A_1 = \int_{-1-\sqrt{13}}^{-2} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right) dx \approx \left[-\tfrac{1}{80}x^5 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-4,6}^{-2} = F(-2) - F(-4,6)$$

$$A_2 \approx \int_{2,6}^{-2} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right) dx = F(-2) - F(2,6)$$

$$A_2 \approx \int_{2,6}^{4} \left(-\tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 - x - 6\right) dx = F(4) - F(2,6)$$

Gesamtfläche: $A = 2 \cdot F(-2) - F(-4,6) - 2 \cdot F(2,6) + F(4) = \ldots$

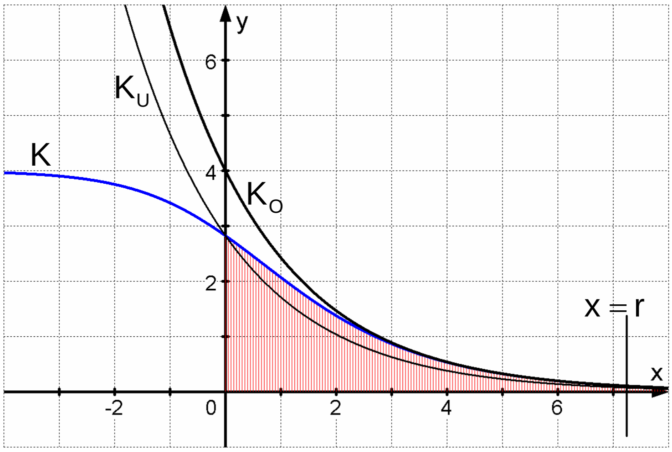
Der Rest ist Taschenrechnerarbeit !

2.12 Abschätzung von Flächen.

1. Fall Eingrenzung durch „einfachere" Funktionen- (Abitur 1981, BW)

Das Schaubild von $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1+e^x}}$ begrenzt mit der x-Achse und der Geraden x = r eine Fläche.

Da das Integral $\int_0^r \frac{4}{\sqrt{1+e^x}}dx$ jedoch für uns nicht berechenbar ist, kann man diese Fläche nach oben und unten abschätzen.



Der erste Teil dazu ist folgende Aufgabe:

Zeige, daß für $x \in \mathbf{R}_0^+$ gilt: $2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq f(x) \leq 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ (Beweis nächste Seite)

Dies bedeutet, daß rechts von der x-Achse unsere Kurve K zwischen den beiden Exponentialkurven K_O und K_U verläuft. Also ist unsere gesuchte Fläche einerseits höchstens so groß wie das von K_O begrenzte Kru-Li-Trap, und mindestens so groß wie das von K_U begrenzte andere Kru-Li-Trap.

Berechnung der beiden Kru-Li-Traps:

$$A_O = \int_0^r 4e^{-\frac{x}{2}}dx = 4\left[(-2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^r = -8\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^r = -8e^{-\frac{r}{2}} + 8e^0 = 8 - 8e^{-\frac{r}{2}}$$

$$A_U = \int_0^r 2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx = 2\sqrt{2}\left[(-2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^r = -4\sqrt{2}\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^r = -4\sqrt{2}e^{-\frac{r}{2}} + 4\sqrt{2}e^0 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}e^{-\frac{r}{2}}$$

Es folgt:

$$4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}e^{-\frac{r}{2}} \leq A(r) \leq 8 - 8e^{-\frac{r}{2}}$$

Lassen wir nun die rechte Grenze x = r gegen Unendlich rücken, dann müssen wir beachten: $\lim_{r\to\infty} e^{-r} = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} e^{-\frac{r}{2}} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{e^{-r}} = 0$

Also folgt für den Grenzwert A*:

$$4\sqrt{2} < A^* < 8$$

d.h. 5,66 < A* < 8

Nun kennen wir zwar nicht den genauen Wert der Fläche, doch wissen wir, daß diese bis ins Unendliche reichende Fläche einen endlichen Inhalt haben muß, der zwischen 5,66 und 8 liegen muß.

Beweis der Doppelungleichung:

1. Teil $$2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}} \le \frac{4}{\sqrt{1+e^x}} \quad (1)$$

Beide Seiten sind positiv, also bleibt beim Quadrieren die Ungleichung erhalten:

$$8\cdot e^{-x} \le \frac{16}{1+e^x}$$
$$\left(1+e^x\right)\cdot e^{-x} \le 2$$
$$e^{-x}+1 \le 2$$
$$e^{-x} \le 1 \quad (2)$$

Und diese letzte Ungleichung gilt für alle $x \ge 0$, denn $y = e^{-x}$ fällt streng monoton und $e^0 = 1$. Nun muß man nur noch feststellen, daß man von (2) aus alle Schritte rückwärts gehen kann, so daß aus der für $x \ge 0$ gültigen Ungleichung die Ungleichung (1= folgt.

2. Teil: $$\frac{4}{\sqrt{1+e^x}} \le 4e^{-\frac{x}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{1+e^{-x}} \le e^{-x}$$
$$1 \le \left(1+e^x\right)e^{-x}$$
$$1 \le e^{-x}+1$$
$$0 \le e^{-x} \quad (4)$$

Die Ungleichung (4) gilt für alle x, und alle Schritte sind rückwärts machbar, sodaß aus (4) die (3) folgt.

Damit ist die Ungleichung $2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}} \le f(x) \le 4\cdot e^{-\frac{x}{2}}$ bewiesen.

2. Fall Trapez-Näherungsverfahren mit Sekanten oder Tangenten.

Es gibt verschiedene Verfahren, nicht berechenbare Flächen näherungsweise durch Trapeze zu berechnen. Dazu zerlegt man die Fläche durch Parallelen zur y-Achse in mehrere Kru-Li-Traps und ersetzt dann den oberen Kurvenbogen durch geradlinige Stücke, die aus Tangenten- oder Sekanten-Stücken bestehen.

Die sich so ergebenden Formeln heißen z.B. **Sehnen-Trapezformel** oder **Simpson-Regel.**
Dies wird in der Datei 48115 (Flächenberechnungen 3) gezeigt.