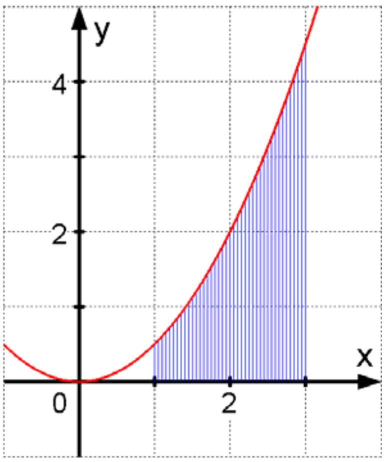
Analysis

Flächenberechnungen



Teil 1:

Berechnung durch Ausmessen
Obersummen und Untersummen

Datei Nr. 48 111

Strand 6. Februar 2006

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Datei 48111

1. Rechtecksmethoden 1

1.1 Ein erstes großes Beispiel 1
1.2 Herleitung einer Flächeninhaltsformel 3
1.3 Wichtige Bemerkungen 8
Aufgabe 2 10
Lösung der Aufgaben 11

Datei 48112

2. Flächenberechnung mit dem Integral 21
2.1 Wie kam man auf die Ableitung 21
2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 23
2.3 Eine gute Integralformel für Kru-Li-Traps 26
2.4 24 Aufgaben zur Flächenberechnung 29

Datei 48113

2.5 Lösungen 32

Datei 48114

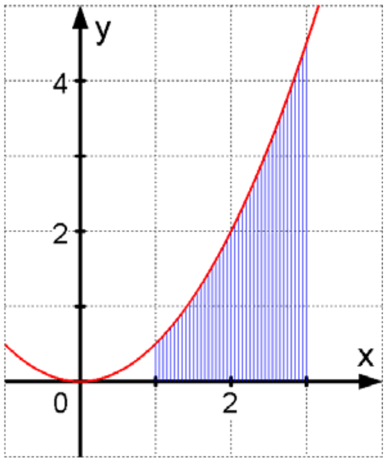
2.6 Kru-Li-Traps unter der x-Achse 51
2.7 Es geht drunter und drüber 52
2.8 Flächen zwischen zwei Kurven 53
2.9 Flächen, die bis uns Unendliche Reichen 55
2.10 Flächen zwischen zwei Kurven 57
2.11 Zusammengesetzte Flächen 59
2.12 Abschätzung von Flächen 61

Datei 48115

3. Näherungsverfahren zur Flächenberechnung 63
3.1 Rechtecksverfahren 63
3.2 Sehnen-Trapez-Regel 64
3.3 Simpson-Regel 65
3.4 Zusatz: Arcus-Tangens als Stammfunktion 67

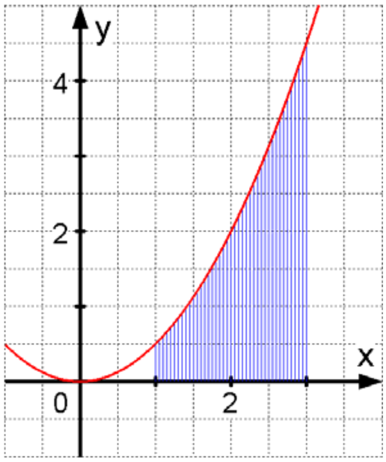
1. Rechtecksmethoden

1.1 Ein erstes großes Beispiel



Wir wollen uns einer Methode zuwenden, die schon sehr alt ist. Das Bemühen, krummlinig begrenzte Flächen zu messen (siehe Kreisinhalt) stieß schon früh auf das Interesse der Mathematiker.

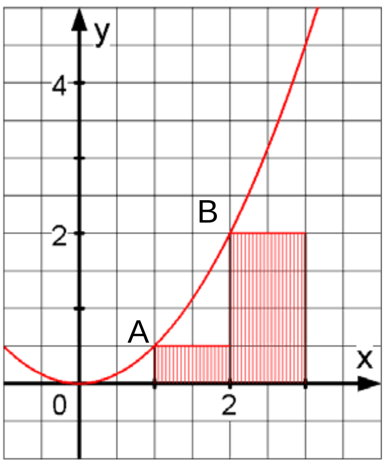
Eine Methode, die sich entwickelt hat, sah vor, Kästchen auszuzählen. Die Flächen zwischen der Kurve $y = \frac{1}{2}x^2$, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = 3 kann ganz grob dadurch *abgeschätzt* Werden, dass man feststellt, dass sie 2 ganze Quadrate und 5 angeschnittene enthält.
Von den angeschnittenen sind manche groß, manche klein. Sagen wir, im Mittel sind sie etwa ein halbes Quadrat. Also erhalten wir 2 ganze und 5 halbe Quadrate, also $A \approx 2 + \frac{5}{2} = 2 + 2{,}5 = 4{,}5$ (FE).

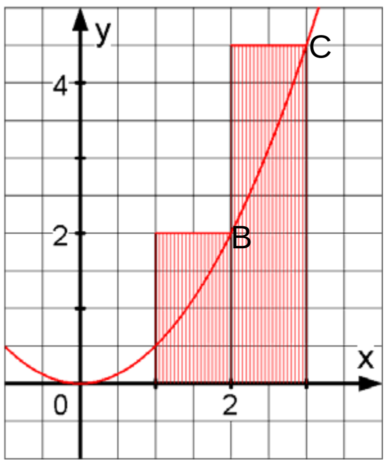


Zugegeben, eine sehr ungenaue Methode.
Daher nehmen wir jetzt eine Verfeinerung vor.
Wir zählen neu und finden 14 ganze und 8 angeschnittene Kästchen, die wir wieder als im Mittel 8 halbe Kästchen, also zusammen als 4 Kästchen ansehen können. So kommen wir dann auf 14 + 4 = 18 Kästchen. Da unsere neuen Kästchen den Inhalt 0,25 (Flächeneinheiten) haben, führt uns diese verfeinerte Methode wieder auf 4,5 FE.
Aber dies heißt noch nicht, dass dies das genaue Ergebnis ist. Versuchen Sie es mal mit mm-Papier.

Nun ich will verraten, daß der tatsächliche Inhalt $A = 4\frac{1}{3}\,\text{FE} \approx 4{,}333\,\text{FE}$ ist.

Dieses Ergebnis erhalten wir mit der folgenden Rechtecksmethode.
Zunächst zerteilen wir die Fläche in 2 Teile, d.h. wir arbeiten mit 2 Rechtecken. Die Gesamtbreite ist 2, Wir machen es uns leicht und machen alle Rechtecke gleich breit, also wird die Breite $\Delta x = 1$. Im 1. Bild lassen wir die Rechtecke von unten gegen die Kurve stoßen. Sie berühren dann in den Punkten $A\left(1 \middle| \frac{1}{2}\right)$ und $B(2\,|\,2)$.





Im 2. Bild werden die Rechtecke so hoch, daß die Kurvenfläche ganz innerhalb der Rechtecksfläche liegt. Die Rechtecke gehen daher bis zu den Kurvenpunkten $B(2\,|\,2)$ und $C\left(3 \middle| \frac{9}{2}\right)$.

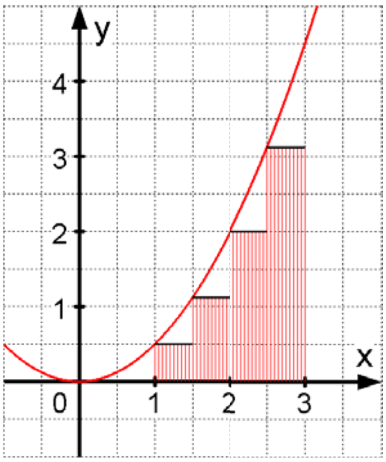
Untere Rechtecksfläche: $U_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$

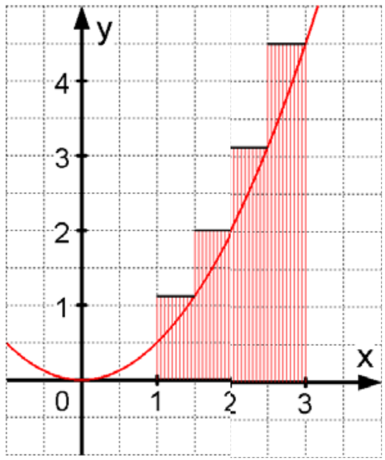
Obere Rechtsecksfläche: $O_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{9}{2} = 2 + \frac{9}{2} = 6{,}5$.

Die tatsächliche Fläche liegt dazwischen: $U_1 < A < O_1$ also wissen wir nach dem

<u>1. Schritt</u>: $2{,}5 < A < 6{,}5$. (1)

<u>2. Schritt</u>: Wir verbessern die Methode, indem wir zweimal halbieren, das ergibt 4 Teilintervalle, jedes von der Breite $\frac{1}{2}$. Das sie dann so aus:





Die 4 innerhalb der Kurvenfläche liegenden Rechtecke bilden die sogenannte **Untersumme.**
Die 4 Rechtecke, welche die Kurvenfläche ganz beinhalten, bilden die sogenannte **Obersumme.**
Alle Rechtecke haben dieselbe Breite $\Delta x = \frac{1}{2}$.
Wir erhalten diese Formeln:

Untersumme: $U_2 = \frac{1}{2} \cdot f(1) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} + 2 + \frac{25}{8}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4+9+16+25}{8} = \frac{54}{16} = 3{,}375$$

Obersumme: $O_2 = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(2) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(3) = \frac{1}{2} \cdot \left[f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right]$

$$O_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{9}{8} + 2 + \frac{25}{8} + \frac{9}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+16+25+36}{8} = \frac{86}{16} = 5{,}375$$

<u>Bemerkung</u>: Es sollte klar werden, daß die Untersumme immer als Höhen die Funktionswerte an den linken Rändern verwendet, während die Obersumme ihre Höhen an den rechten Rändern als Funktionswerte verwendet.
Neues Ergebnis:

$$3{,}375 < A < 5{,}375 \qquad (2)$$

<u>3. Schritt</u>:
3 mal fortgesetzt halbieren ergibt 8 Teilintervalle gleicher Breite $\Delta x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
Wir können jetzt die Untersumme und die Obersumme sofort aufschreiben.
Dabei klammern wir die bei allen Rechtecken gleiche Breite sofort aus:

Untersumme: $U_3 = \frac{1}{4} \cdot \left[f\left(\frac{4}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{6}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(\frac{8}{4}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{10}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right)\right]$

Wir schematisieren die weitere Berechnung so:
Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und wir benötigen diese

Funktionswerte: $f\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}n^2$ und dies für n = 4 bis 11.

Damit folgt:

$$U_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{32}\left[4^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + 11^2\right] = \frac{492}{128} = 3{,}84375$$

Für die **Obersumme** wenden wir jetzt einen abkürzenden Trick an. Man erkennt aus der Zeichnung für n = 4 Teile, daß die Rechtecke 2 bis 4 der Untersumme genau die Reckecke 1 bis 3 der Obersumme sind. Bei n = 8 Teilen sind die Rechtecke 2 bis 8 der Untersumme identisch mit den Rechtecken 1 bis 7 der Obersumme. Wir ersetzen also nur das 1. Rechteck der Untersumme durch das 8. der Obersumme und sind fertig:

Untersumme: $O_3 = \frac{1}{4}\cdot\left[f\left(\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{6}{4}\right)+f\left(\frac{7}{4}\right)+f\left(\frac{8}{4}\right)+f\left(\frac{9}{4}\right)+f\left(\frac{10}{4}\right)+f\left(\frac{11}{4}\right)+f\left(\frac{12}{4}\right)\right]$

$$O_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{32}\left[5^2+6^2+...+11^2+12^2\right] = \frac{620}{128} = 4{,}84375$$

Damit lautet das Ergebnis des 3. Schrittes:

$$3{,}84375 < A < 4{,}84375 \quad (3)$$

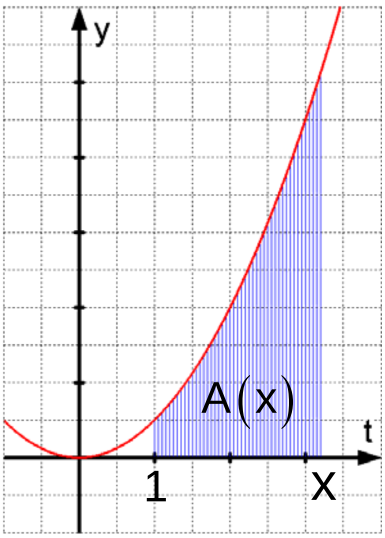
Bemerkung: Schauen wir uns einmal diese drei Ergebnisse an, die wir bisher haben:

$$2{,}5 < A < 6{,}5. \quad (1)$$
$$3{,}375 < A < 5{,}375 \quad (2)$$
$$3{,}84375 < A < 4{,}84375 \quad (3)$$

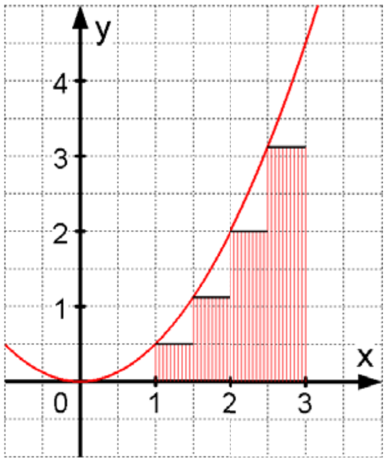
Wir erkennen, daß die Untersumme immer größer wird, die Obersumme immer kleiner wird, und daß der Abstand zwischen Ober- und Untersumme auch immer kleiner wird. Zuerst war er 4, dann 2, in (3) noch 1.
Würden wir weiter rechnen, kämen wir dem auf Seite (1) verratenen Ergebnis $A = 4\frac{1}{3}\,FE \approx 4{,}333\,FE$ immer näher.
Das sieht alles nach einer Gesetzmäßigkeit aus, die wir nun angehen müssen.

1.2 Herleitung einer Flächeninhaltsformel zum Beispiel aus 1.1

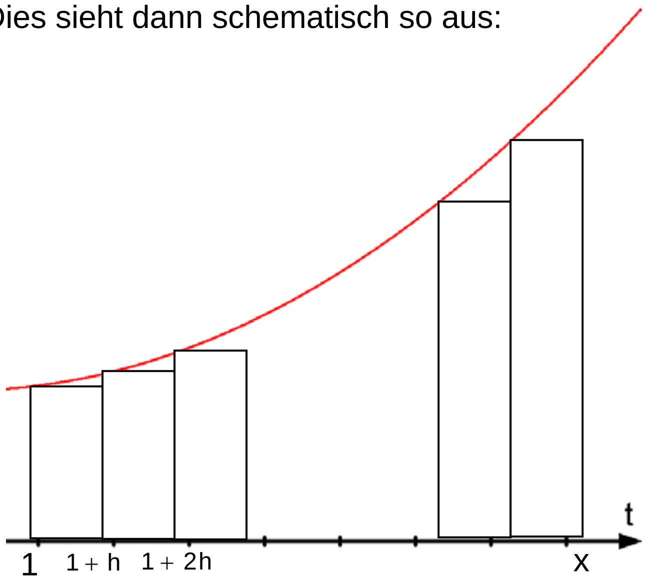
Was wir jetzt nachvollziehen, wurde schon millionenfach berechnet. Und bei all dieser Routine hat es sich gezeigt, daß wir uns eine Fläche mit variablem rechten Rand aussuchen müssen. Im Klartext heißt dies: Wir arbeiten mit der Funktion $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ nennen also die Funktionsvariable jetzt t statt x, damit wir den rechten Rand der Fläche mit x bezeichnen können.
Da der Flächeninhalt nunmehr vom rechten Rand x abhängt, erhalten wir als Ergebnis eine **Flächeninhaltsfunktion**. Und dieser können wir einen Zusammenhang zur "Randfunktion" f entlocken, was uns dann weiterhelfen wird. Mit einem festen rechten Rand (z.B. 3 wie in 1.1) könnten wir keinen Zusammenhang erkennen !
Soweit zum methodischen Vorgehen.
Die nun folgende Rechnung sollte ein Leistungskurs-Schüler verstehen und an anderen Funktionen selbst nachvollziehen können, denn hier geht es um eine der großen historischen Leistungen der Mathematik mit wichtigen Überlegungen.



Vorüberlegungen: Wir zerlegen nun das Intervall $[\,2\,;\,x\,]$ in n gleich breite Teile, was man eine „äquidistante Zerlegung" nennt. Die Länge des Intervalls ist $x-1$ (da wir $x > 1$ voraussetzen) und somit erhalten wir n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{x-1}{n}$.
Wir werden jetzt der Einfachheit halber statt Δx stets h schreiben und merken uns:
Das Intervall $[\,2\,;\,x\,]$ haben wir in n gleich Teile der Länge $h = \frac{x-1}{n}$ zerlegt.



Dazu bilden wir nun eine **Untersumme**, das heißt wir denken uns ähnlich wie in der rechten Abbildung n Rechtecke zwischen Kurve und x-Achse eingezeichnet. Dies sieht dann schematisch so aus:



Die Punkte auf der x-Achse liegen bei:

$$\{1; 1+h; 1+2h; 1+3h; ...; 1+(n-1)h; 1+n\cdot h = x\}$$

Nun berechnen wir die Summe der n Rechtecksflächen, also die Untersumme U_n :

$$U_n = h\cdot f(1) + h\cdot f(1+h) + h\cdot f(1+2h) + ... + h\cdot f(1+(n-1)h)$$

Wir können (da wir gleiche Rechtecksbreiten gewählt haben) diese Breite h ausklammern:

$$U_n = h\cdot\left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + ... + f(1+(n-1)h)\right] \qquad (1)$$

Nun müssen wir die einzelnen Funktionswerte berechnen. Dies können wir wieder schematisch für alle auf einmal tun, denn alle haben die gleiche Form:

$$f(1+z\cdot h) = \tfrac{1}{2}\cdot(1+z\cdot h)^2 = \tfrac{1}{2}(1+2zh+z^2h^2)$$

Beispiel: z = 0: $f(1) = \tfrac{1}{2}$

z = 1: $f(1+h) = \tfrac{1}{2}(1+2h+h^2)$

z = 2: $f(1+2h) = \tfrac{1}{2}(1+4h+4h^2)$

z = 3: $f(1+3h) = \tfrac{1}{2}(1+6h+9h^2)$

z = (n - 1): $f(1+(n-1)h) = \tfrac{1}{2}\left(1+2(n-1)h+(n-1)^2h^2\right)$

Jetzt setzen wir alle Funktionswerte in die Formel (1) ein. Da zu jedem der Faktor $\tfrac{1}{2}$ gehört, können wir diesen Bruch ausklammern, dann folgt:

$$U_n = h\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left[1+(1+2h+h^2)+(1+4h+4h^2)+(1+6h+9h^2)+...+\left(1+2(n-1)h+(n-1)^2h^2\right)\right]$$

In der eckigen Klammer kommen nun drei Sorten Summanden vor: In jeder Klammer steht zu Beginn die Zahl 1, diese kommt also n mal vor, gibt zusammen n. Dann enthält jede runde Klammer einen Summanden mit dem Faktor h. Wir fassen alle diese Summenden zusammen und klammern h aus, schließlich haben wir noch Summanden mit dem Faktor h^2 , die wir als drittes zusammenfassen und zugleich h^2 ausklammern:

$$U_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + h\cdot\left(2+4+6+\ldots+2(n-1)\right) + h^2\left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right)\right]$$

$$U_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + 2h\cdot\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right) + h^2\left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right)\right]$$

Um weiterrechnen zu können, benötigen wir höhere Hilfe. Es gibt nämlich Formeln, die es gestatten, die Summe der natürlichen Zahlen (hier farbig blau) und die Summe der Quadratzahlen (rot) zu berechnen. Hier folgt der Einschub für diese Formeln:

Hilfsformeln für unsere Rechnung:

1. Summe der natürlichen Zahlen:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2} \qquad \text{(S1)}$$

2. Summe der Quadratzahlen:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k\cdot(2k+1)(k+1)}{6} \qquad \text{(S2)}$$

In unserer Rechnung ist diese Summe zu berechnen: $1+2+3+\ldots+(n-1)$.
Dazu müssen wir die Summenformel S1 mit k = (n – 1) anwenden. Dies ergibt

$$1+2+3+\ldots+(n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Zweitens benötigen wir diese Summe der Quadratzahlen: $1+4+9+\ldots+(n-1)^2$

Dazu müssen wir die Summenformel S2 mit k = (n – 1) anwenden. Dies ergibt

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\cdot(2n-1)n}{6}$$

Nun setzen wir wieder alles zusammen:

$$U_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + 2h\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} + h^2\cdot\frac{(n-1)\cdot(2n-1)n}{6}\right]$$

Jetzt müssen wir für h wieder den Term $h = \frac{x-1}{n}$ einsetzen und dann kräftig

umformen: $$U_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\left[n + 2\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} + \left(\frac{x-1}{n}\right)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot(2n-1)n}{6}\right]$$

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\left[n + (x-1)\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{n} + (x-1)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot(2n-1)n}{6n^2}\right]$$

Wir bringen das n von links vorne noch in die Klammer hinein und kürzen:

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\frac{(n-1)}{n}+(x-1)^2\cdot\frac{(n-1)\cdot(2n-1)n}{6n^3}\right]$$

Nebenrechnung: $(n-1)\cdot(2n-1)(n-2) = 2n^3-7n^2+7n-2$ (Nachrechnen!)

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\frac{n-1}{n}+(x-1)^2\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}\right]$$

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\frac{n-1}{n}+(x-1)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\right]$$

Nun zerlegen wir die beiden Brüche in einzelne Bruchsummanden:

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(x-1)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad (2)$$

Jetzt haben wir eine ganz entscheidende Stelle erreicht !!! Tief durchatmen ist angesagt, denn wir biegen sofort auf die Zielgerade ein.

Wenn wir unsere Flächeninhaltsmessung immer besser machen ollen, müssen wir n immer größer machen. Aber solange wir ein Stufenschema haben, d.h. untere und obere Rechtecke, wird die Untersumme zu klein und die Obersumme zu groß sein.

Das wird anders wenn wir gedanklich den Schritt ins Unendliche wagen. Wenn wir das Intervall in unendlich viele Teile zerlegen könnten, dann wären die Rechtecke so schmal, daß sie eigentlich die Breite Null haben müssten.

Denn hätten wir eine auch noch so kleine Breite und „unendlich viele" Rechtecke, dann würden sie nicht in das Intervall von 2 bis x hineinpassen.

Wir müssen vor dem Schritt ins Unendlichen keine Angst haben. Die Mathematik beherrscht dies ganz gut. Dazu müssen wir einen weiteren Ausflug in die Welt der Zahlenfolgen machen:

Der Term $a_n = \frac{1}{n}$ definiert eine Zahlenfolge, die man dadurch erhält, daß man der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 usw. einsetzt. Das Ergebnis ist die Folge

$$\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\right\}$$

Die Werte dieser Brüche werden immer kleiner, denn wenn man etwa bei n = 1 Million = 1 000 000 angekommen ist, dann erhält man das Folgenglied

$$a_{1\,000\,000} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$$

Läßt man n weiterlaufen, werden die Werte der Brüche beliebig klein. Man sagt dazu: Die Folge hat den Grenzwert 0 und schreibt dies so auf:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

(Gelesen: Limes von 1 durch n für n gegen Unendlich gleich 0).

Dies besagt nun nicht etwa, daß man irgendwann bei 0 angekommen ist. Hier vollzieht die Mathematik quasi den Sprung in die Unendlichkeit, indem man vortäuscht, man wäre im Unendlichen angekommen – dann wäre man bei 0. Stellen wir uns es besser so vor: Je größer n wird, desto näher ist man beim Grenzwert 0.
Dasselbe gilt nun auch für die anderen Bruchterme, die in der Formel (2) stehen:
Die durch $a_n = \frac{7}{n}$ definierte Folge $\left\{7; \frac{7}{2}; \frac{7}{3}; \frac{7}{4}; ...\right\}$ hat ebenso den Grenzwert 0,

was man auch etwa an $a_{1\,000\,000} = \frac{7}{1\,000\,000} = 0{,}000\,007$ erkennt.

Dasselbe gilt für $a_n = \frac{7}{n^2}$ mit $\left\{7; \frac{7}{4}; \frac{7}{9}; \frac{7}{16}; ...\right\}$, etwa mit

$$a_{1\,000\,000} = \frac{7}{1\,000\,000^2} = 0{,}000\,000\,000\,007$$

oder erst recht mit $a_n = \frac{2}{n^3}$ mit $\left\{2; \frac{2}{8}; \frac{2}{27}; \frac{2}{64}; ...\right\}$.
Alle in (2) auftretenden Folgenterme haben den Grenzwert 0, d.h. wenn wir die Zerlegung unseres Intervalls gegen Unendlich treiben, dann nehmen diese Brüche allmählich den Wert 0 an.
So geht's jetzt weiter:

Es war

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+(x-1)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad (2)$$

Verfeinert man die Zerlegung, indem man n gegen Unendlich gehen läßt, und berücksichtigt dabei diese Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,$$

dann wird aus (2):

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)\cdot(1-0)+(x-1)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot(2-0+0)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)^2\right]$$

Nennen wir diesen Grenzwert nun A, dann folgt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)+\frac{1}{3}\left(x^2-2x+1\right)\right] = \frac{1}{2}(x-1)\left[1+x-1+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right]$$

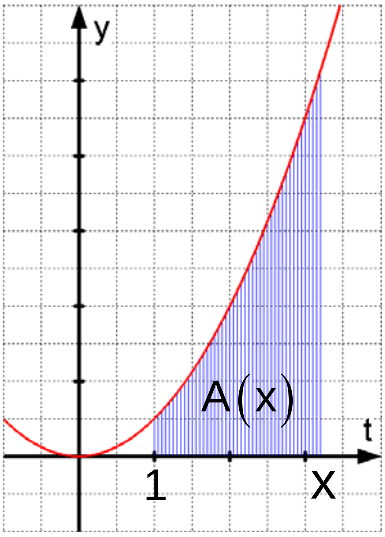
$$A = \frac{1}{2}(x-1)\left[x+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}(x-1)\left[\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}$$

Ergebnis: Die Flächeninhaltsfunktion für die Fläche ist

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}$$

1.3 Wichtige Bemerkungen:



1. Wir haben jetzt aus der Untersumme heraus den Flächeninhalt der rechts nochmals gezeigten Fläche berechnet.
Man kann nun genauso die Obersumme dazu verwenden. Zusammen mit den kleinen Tricks aus Teil 1.1 wird dies etwas rascher gehen.

<u>AUFGABE 1</u>: Zeige, daß die Obersumme dasselbe Ergebnis liefert.

2. Die hier gezeigte Theorie geht auf den deutschen Mathematiker ***Bernhard Riemann*** (1826 – 1866) zurück. Er hat diese Methode durchdacht und in ein System gebracht.
Man kann sie verallgemeinern und zeigen, daß die Folge der Untersummen monoton wächst, die der Obersummen monoton fällt, und daß die Abstände zwischen Ober- und Untersumme gegen Null gehen. Damit ist eine Intervall-Schachtelung definiert, die einen eindeutigen Grenzwert liefert, den man der Fläche als Inhalt zuordnen kann.

3. **Anwendung der Flächeninhaltsfunktion:**
Wir wissen jetzt, daß die Fläche zwischen der Kurve K mit $y = f(x) = \tfrac{1}{2}x^2$

und der t-Achse von t = 1 bis t = x durch die Funktion $A(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}$

beschrieben wird.
In 1.1 war der rechte Rand bei x = 3. Setzen wir dies ein, so folgt:

$$A(3) = \frac{1}{6}3^3 - \frac{1}{6} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} \approx 4{,}333.$$

Dieses Ergebnis war oben schon verraten worden.

4. Wir können damit nun auch die Fläche unter derselben Kurve berechnen, die etwa von x = 2 bis x = 4 reicht.
Dazu arbeiten wir – wie könnte es anders sein – mit einem Trick.
Wir können nach obigem Ergebnis nur Flächen berechnen, die von x = 1 aus nach rechts gehen. Also berechnen wir

$$A(4) = \frac{1}{6}4^3 - \frac{1}{6} = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6} \quad \text{und} \quad A(2) = \frac{1}{6}2^3 - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Beide Flächen überdecken sich. Subtrahieren wir A(2) von der größeren Fläche, dann bleibt die gesuchte Fläche A von 2 bis 4 übrig:

$$A_2^4 = A(4) - A(2) = \frac{63}{6} - \frac{7}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}.$$

Wenn man diese Rechnung noch ausführlicher macht, sieht sie so aus, wie wir es von der Integralrechnung her kennen:

$$A_2^4 = A(4) - A(2) = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\right]_2^4 = \left[\frac{63}{6} - \frac{1}{6}\right] - \left[\frac{7}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

Ich zeige noch mehr: Man erkennt, daß der Bruch $\frac{1}{6}$ in beiden eckigen Klammern steht und daher bei der Subtraktion wegfällt. Dann will ich ihn mal gleich weglassen: Dies ergibt dann folgende Schreibweise:

$$A_2^4 = A(4) - A(2) = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_2^4 = \frac{63}{6} - \frac{7}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

Man erkennt die Analogie zum bestimmten Integral. Und dies ist kein Zufall. Leiten wir doch einmal die zuvor berechnete Flächeninhaltsfunktion ab:

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{2}x^2 = f(x) \quad !!!!!!$$

Wir erkennen, daß die Flächeninhaltsfunktion eine Stammfunktion der Randfunktion ist. (Dieses Beispiel ist dafür noch kein Beweis. Dieser wird in der Datei Nr. 48112 (Flächen 2) geführt). Aber wir wollen uns dennoch anschauen, wie man damit diese Fläche von 2 bis 4 berechnen kann:

$$A_2^4 = \int_2^4 \tfrac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_2^4 = \frac{64}{6} - \frac{8}{6} = \frac{56}{6} = \frac{28}{3}$$

Ist dies nicht viel einfacher als die Rechnerei mit Obersummen und Untersummen ?
Dennoch: Diese historische Leistung der Flächenberechnung auf diese Weise gehört in jeden Leistungskurs und sollte auch schon deswegen nachvollzogen und ein wenig geübt werden, weil darin viele wichtige Überlegungen vorkommen.

4. Und nun noch der krönende Abschluß:
Verwendet man für die Rechnung mit Untersummen und Obersummen das **Summenzeichen**, dann kann man eine ganz neue Schreibweise verwenden:

Gleichung (1) war die Untersumme der n Rechtecke:

$$U_n = h \cdot \left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + ... + f(1+(n-1)h)\right]$$

Ich verwende für die Rechtecksbreite jetzt wieder Δx statt h und setze Diesen Faktor rechts hinter die Klammer:

$$U_n = \left[f(1) + f(1+\Delta x) + f(1+2\Delta x) + ... + f(1+(n-1)\Delta x)\right] \cdot \Delta x$$

Die in der eckigen Klammer stehenden Funktionswerte haben das Schema $f(1+z\cdot\Delta x)$, wobei z von 0 bis n-1 läuft. Mit Hilfe des Summenzeichens kann man diese Summe von Funktionswerten so schreiben:

$$\sum_{z=0}^{n-1} f(1+\Delta x) = f(1) + f(1+\Delta x) + f(1+2\Delta x) + ... + f(1+(n-1)\Delta x)$$

(Gelesen: Summe für z= 0 bis n-1 über f(...).)
Damit läßt sich die Untersumme so darstellen:

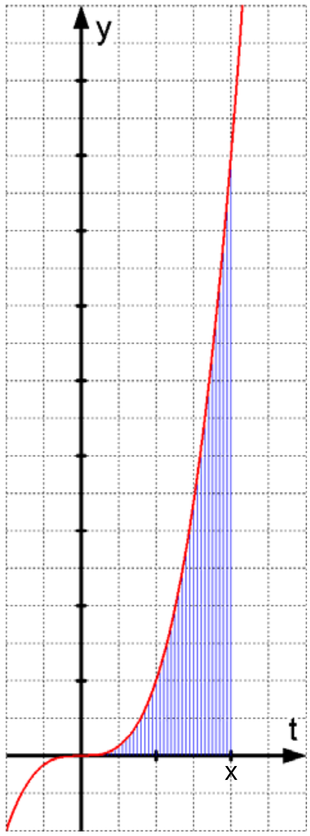
$$U_n = \sum_{z=0}^{n-1} f(1+z\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \qquad \text{oder auch} \qquad U_n = \sum_{x=1}^{(n-1)\cdot\Delta x} f(x)\cdot\Delta x$$

Verfeinert man die Zerlegung so, daß $n \to \infty$ **geht, dann wird daraus eine Summe aus unendlich vielen, unendlich dünnen Rechtecken.**

Dafür hat man die Schreibweise abgewandelt in: $A = \int_1^3 f(x)\,dx$

Man erkennt jetzt die Bedeutung des Integralzeichens als Summengrenzwert.

Aufgabe 2:



Nebenstehende Abbildung zeigt die Funktion $y = f(t) = t^3$.

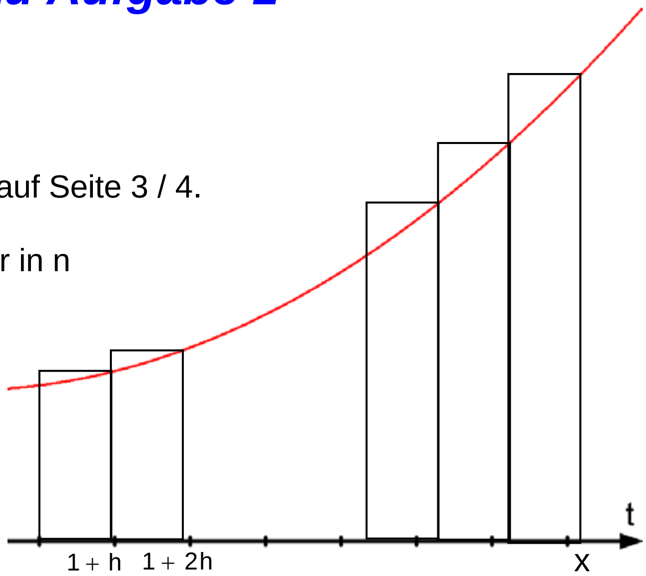
Schraffiert ist die Fläche zwischen der Kurve, der x-Achse und der Geraden $t = x$.

Diese Fläche hat einen Inhalt A(x);
Es ist natürlich wieder eine Flächeninhaltsfunktion, weil der rechte Rand variabel gehalten ist.

Berechne die Untersumme zu dieser Fläche zu einer äquidistanten Zerlegung mit n Teilen und davon den Grenzwert für $n \to \infty$.

Zeige, daß das Ergebnis lautet: $A(x) = \frac{1}{4}x^4$.

Lösung zu Aufgabe 1



Gesucht ist die Obersumme zur Fläche auf Seite 3 / 4.

Wir zerlegen das Intervall [1 ; x] wieder in n gleich breite Teilintervalle der Breite $h = \frac{x-1}{n}$, haben also wieder eine äquidistante Zerlegung.

Die Teilungspunkte auf der x-Achse liegen wie bei der Untersumme bei:

$$\{1; 1+h; 1+2h; 1+3h; ...; 1+(n-1)h; 1+n\cdot h = x\}$$

Da wir uns auf eine monoton steigende Funktion beschränken wollen, finden wir die Rechteckshöhen jetzt als Funktionswerte an den rechten Seiten der Teil-Rechtecke, wie die Abbildung zeigt.

Nun berechnen wir die Summe der n Rechtecksflächen, also die Obersumme O_n :

$$O_n = h\cdot f(1+h) + h\cdot f(1+2h) + ... + h\cdot f(1+(n-1)h) + h\cdot \underbrace{f(1+n\cdot h)}_{=x}$$

Wir können (da wir gleiche Rechtecksbreiten gewählt haben) diese Breite h ausklammern:

$$O_n = h\cdot\left[f(1+h) + f(1+2h) + ... + f(1+(n-1)h) + f(1+n\cdot h)\right] \qquad (1)$$

Berechnung der einzelnen Funktionswerte. Dies können wir wieder schematisch für alle auf einmal tun, denn alle haben die gleiche Form:

$$f(1+z\cdot h) = \tfrac{1}{2}\cdot(1+z\cdot h)^2 = \tfrac{1}{2}\left(1+2zh+z^2h^2\right)$$

Beispiel:

Beispiel:	z = 1:	$f(1+h) = \frac{1}{2}\left(1+2h+h^2\right)$
	z = 2:	$f(1+2h) = \frac{1}{2}\left(1+4h+4h^2\right)$
	z = 3:	$f(1+3h) = \frac{1}{2}\left(1+6h+9h^2\right)$
	z = (n - 1):	$f(1+(n-1)h) = \frac{1}{2}\left(1+2(n-1)h+(n-1)^2h^2\right)$
	z = n:	$f(1+nh) = \frac{1}{2}\left(1+2nh+n^2h^2\right)$

Jetzt setzen wir alle Funktionswerte in die Formel (1) ein. Da zu jedem der Faktor $\frac{1}{2}$ gehört, können wir diesen Bruch auch noch ausklammern, dann folgt:

$$O_n = h\cdot\tfrac{1}{2}\cdot[\left(1+2h+h^2\right) + \left(1+4h+4h^2\right) + \left(1+6h+9h^2\right) + ...$$

$$+ ... + + ... + \left(1+2(n-1)h+(n-1)^2h^2 + 1+2nh+n^2h^2\right)]$$

In der eckigen Klammer kommen nun wieder drei Sorten Summanden vor:
In jeder der n Klammern steht zu Beginn die Zahl 1, diese kommt also n mal vor, gibt zusammen n. Die mittleren Summanden enthalten alle den Faktor h. Wir fassen alle diese n Summenden zusammen und klammern h aus.

Schließlich haben wir noch Summanden mit dem Faktor h^2 , die wir als drittes zusammenfassen und zugleich h^2 ausklammern:

$$O_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + h\cdot(2+4+6+...+2n) + h^2\left(1+4+9+...+n^2\right)\right]$$

$$O_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + 2h\cdot(1+2+3+...+n) + h^2\left(1+4+9+...+n^2\right)\right]$$

Mit der Summenformel 1 von Seite 5 mit k = n folgt

$$1+2+3+...+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

und

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\cdot(2n+1)(n+1)}{6}$$

Nun setzen wir alles zusammen:

$$O_n = \tfrac{1}{2}h\left[n + 2h\cdot\frac{n(n+1)}{2} + h^2\cdot\frac{n\cdot(2n+1)(n+1)}{6}\right]$$

Jetzt müssen wir für h wieder den Term $h = \frac{x-1}{n}$ einsetzen

$$O_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\left[n + 2\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{x-1}{n}\right)^2\cdot\frac{n\cdot(2n+1)(n+1)}{6}\right]$$

$$O_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{n}\cdot\left[n + (x-1)\cdot\frac{n(n+1)}{n} + (x-1)^2\cdot\frac{n\cdot(2n+1)(n+1)}{6n^2}\right]$$

Wir bringen das n von links vorne noch in die Klammer hinein und kürzen

$$O_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1 + (x-1)\cdot\frac{(n+1)}{n} + (x-1)^2\cdot\frac{n\cdot(2n+1)(n+1)}{6n^3}\right]$$

Nebenrechnung: $n\cdot(2n+1)(n+1) = n\cdot\left(2n^2+2n+n+1\right) = 2n^3+3n^2+n$

$$O_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1 + (x-1)\cdot\frac{n+1}{n} + (x-1)^2\cdot\frac{2n^3+n^2+n}{6n^3}\right]$$

Nun zerlegen wir die beiden Brüche in einzelne Bruchsummanden:

$$O_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1 + (x-1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + (x-1)^2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n^2}\right)\right] \quad (2)$$

Verfeinert man die Zerlegung, indem man n gegen Unendlich gehen läßt, und berücksichtigt dabei diese Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n^2} = 0$$

dann wird aus (2):

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1 + (x-1)\cdot(1-0) + (x-1)^2\cdot\left(\frac{1}{3}+0+0\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)^2\right]$$

Dieser Grenzwert stimmt nun genau mit dem Grenzwert der Untersummen überein, und dort sahen wir:

$$A = \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left[1+(x-1)+\frac{1}{3}\left(x^2-2x+1\right)\right] = \frac{1}{2}(x-1)\left[1+x-1+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}(x-1)\left[x+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}(x-1)\left[\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right]$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}$$

Ergebnis: Die Flächeninhaltsfunktion für die Fläche ist

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}$$